

UNIVERSIDAD DE MONTEVIDEO  
Facultad de Ciencias Empresariales y Economía  
Facultad de Ingeniería

Prueba de Evaluación en Matemática para los aspirantes a ingresar a la Universidad de Montevideo.

(7/Feb/02)

PRIMERA PARTE

1. Simplificar la siguiente expresión hasta obtener un polinomio de segundo grado en  $x$ .

$$\frac{x^2 - 3x - 4 - \frac{4(x-4)}{x-2}}{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x}}$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

3. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x^3 - 5x^2 - 8x)}{x^2 + 4x + 3}$$

4. Hallar el campo de existencia (dominio) de la siguiente función  $f : f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{x^2 - x}$

5. Se considera la función  $f : f(x) = (x-3)^4 (x^2 - 5x + 1)^3 (x^2 + 1)^5$ . Calcular la derivada en el punto  $x = 0$ .

SEGUNDA PARTE

6. Determinar los intervalos donde la función  $f : f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 5$  es creciente.

7. Se considera la función  $f : f(x) = \sqrt[3]{ax^3 - x^2}$  con  $a \neq 0$ . Determinar el valor de  $a$  sabiendo que la asíntota al gráfico de  $f$  en  $+\infty$  es paralela a la recta  $y = x$ . Hallar la ecuación de dicha asíntota.

8. Hallar  $a$  y  $b$  para que la función  $f : f(x) = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 - 1}}$  presente un extremo en el punto  $(2, -\sqrt{3})$ .

9. Hallar (si existen)  $M =$  máximo valor funcional absoluto y  $m =$  mínimo valor funcional absoluto de  $f : f(x) = (-x + 2)^4$  en el intervalo cerrado  $[0, 3]$
10. Hallar la ecuación de la recta que contiene al centro de la circunferencia  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$  y que es perpendicular a la recta  $y = 2x - 1$ .
- 11 (Sólo para Ingeniería) Hallar la constante  $a$  para que la función

$$f : f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en  $x = 0$ .

- 12 (Sólo para Ingeniería) Se considera la función  $f : f(x) = \sqrt{\text{sen}(x^2)}$ . Calcular  $f'(0^+)$  (derivada lateral derecha en 0) y  $f'(0^-)$  (derivada lateral izquierda en 0).

UNIVERSIDAD DE MONTEVIDEO  
Facultad de Ciencias Empresariales y Economía  
Facultad de Ingeniería

Prueba de Evaluación en Matemática para los aspirantes a ingresar a la Universidad de Montevideo.

(7/2/02)

SOLUCIONES

**Solución Problema 1**

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x - 4 - \frac{4(x-4)}{x-2}}{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x}} &= \frac{\frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 24}{x-2}}{\frac{x^2 - 7x + 12}{x(x-2)}} = \frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 24}{x-2} \cdot \frac{x(x-2)}{x^2 - 7x + 12} = \\ &= (x^3 - 5x^2 - 2x + 24) \frac{x}{(x-3)(x-4)} = \\ &= (x-3)(x-4)(x+2) \frac{x}{(x-3)(x-4)} = (x+2)x = \boxed{x^2 + 2x} \end{aligned}$$

**Solución Problema 2**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = 1, \quad y = 3, \quad z = -2}$$

**Solución Problema 3**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x^3 - 5x^2 - 8x)}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 5x^2 - 8x - 1}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 7x - 1)}{(x+3)(x+1)} = \boxed{4}$$

**Solución Problema 4**

$$\frac{\ln(\sqrt{x+1})}{x^2 - x} \text{ está definida } \Leftrightarrow x + 1 > 0 \quad \text{y} \quad x^2 - x \neq 0$$

por lo tanto

$$\boxed{x > -1, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1}$$

**Solución Problema 5**

$$\begin{aligned} f' : f'(x) &= 4(x-3)^3 (x^2 - 5x + 1)^3 (x^2 + 1)^5 + (x-3)^4 3(x^2 - 5x + 1)^2 (2x-5) (x^2 + 1)^5 + \\ &+ (x-3)^4 (x^2 - 5x + 1)^3 5(x^2 + 1)^4 2x \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f' : f'(0) = 4(-3)^3 + (3)^4 3(-5) = \boxed{-1323}$$

SEGUNDA PARTE

**Solución Problema 6**

$$f : f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 5 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$$

por lo tanto la función es creciente en toda la recta.

**Solución Problema 7**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{ax^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{ax^3} = \sqrt[3]{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \pm\infty$$

$$1 = m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{ax^3 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{ax}}{x} = \sqrt[3]{a} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{\frac{x^3 - x^2}{x^3}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{3} \left( \frac{x^3 - x^2}{x^3} - 1 \right) \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(pues  $\sqrt[3]{u} - 1 = u^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}(u - 1)$  si  $u \rightarrow 1$ ). Así la asíntota es

$$\boxed{y = x - \frac{1}{3}}$$

**Solución Problema 8**

$$f : f(x) = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-bx - a}{(\sqrt{x^2 - 1})^3}$$

$$\begin{cases} f(2) = -\sqrt{3} \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a + b}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\ \frac{-2b - a}{(\sqrt{3})^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = -2, b = 1}$$

**Solución Problema 9**

Puntos estacionarios en el interior del intervalo:

$$f(x) = (-x + 2)^4 \Rightarrow f'(x) = -4(-x + 2)^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4(-x + 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f(2) = 0$$

Puntos frontera:

$$f(0) = 16$$

$$f(3) = (-3 + 2)^4 = 1$$

por lo tanto

$f$  alcanza el máximo absoluto en  $x = 0$  y vale  $M = 16$   
 $f$  alcanza el mínimo absoluto en  $x = 2$  y vale  $m = 0$

### Solución Problema 10

$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

### Solución Problema 11

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \left( \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \left( \frac{2x}{x} \right) = a \\ &\Leftrightarrow \boxed{2 = a} \end{aligned}$$

### Solución Problema 12

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\text{sen}(h^2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\text{sen}(h^2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \end{aligned}$$

$f'(0^+) = 1 \quad f'(0^-) = -1$